

EXTRAÇÃO DE DRENAGENS EM IMAGENS DIGITAIS ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Thiago Statella¹

Erivaldo Antônio da Silva²

RESUMO: Neste trabalho, utilizou-se Sensoriamento Remoto aliado ao Processamento Digital de Imagens (PDI) para extrair drenagens em imagens orbitais, visando auxiliar futuros processos de atualização cartográfica. A técnica de PDI escolhida foi a Morfologia Matemática (MM), que é capaz de processar as imagens levando em conta a geometria dos conjuntos contidos nelas. Assim, operadores de *fechamento*, *esqueletização* e *erosão* foram aplicados na extração das drenagens e os resultados confirmam o potencial da MM na automação do processo de extração de feições a partir de imagens.

PALAVRAS-CHAVE: Sensoriamento remoto, morfologia matemática, processamento digital de imagens.

ABSTRACT: This paper demonstrates the use of the Remote Sensing allied to Digital Image Processing (Dip) to extract drainage lines from orbital images aiming to assist future cartographic updating processes. The Dip technique chosen was Mathematical Morphology (MM) because it is able to process images taking in count geometry in its sets included. Thus, operations like *closing*, *skeletization* and *erosion* were applied to extract drainage lines and the results confirm MM potential in automating features extraction processes from images.

KEYWORDS: Remote sensing, mathematical morphology, digital image processing.

1 Mestre em Ciências Cartográficas, pela Universidade Estadual Paulista; professor do Depto de Construção Civil do IFMT – Campus Cuiabá. E-mail: statella@ccivil.cefetmt.br.

2 Doutor em Engenharia de Transportes, pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP); professor do Deptº de Cartografia da Universidade Estadual Paulista – Campus de Presidente Prudente-SP. E-mail: erivaldo@fct.unesp.br.

INTRODUÇÃO

Desde o surgimento da civilização, o homem tem necessidade de demarcar e/ou representar os seus limites espaciais de ocupação, seja por questões econômicas e políticas, seja por questões sociais. A consequência direta desta necessidade foi o surgimento do mapa, que é, de todas as modalidades de comunicação, uma das mais antigas da humanidade e assume extrema importância por ser um elemento essencial à organização de um país, principalmente no que se refere à delimitação de suas fronteiras e divisão em unidades administrativas. O ramo do conhecimento científico que se encarrega da confecção de mapas é a Cartografia que, segundo Taylor (1991), envolve a organização, apresentação, comunicação e utilização da geoinformação nas formas gráfica, digital ou tátil. Pode incluir todas as etapas, desde a apresentação dos dados até o uso final na criação de mapas e produtos relacionados com a informação espacial.

O mapa, como meio de comunicação gráfica do ambiente, deve também acompanhar as mudanças que ocorrem no mundo real para atender às necessidades das atividades de planejamento. É importante, pois, que se dê atenção ao desenvolvimento de métodos de extração de informações que possam ser utilizados quando do processo de atualização de cartas e mapas.

No Brasil, ainda hoje, existem regiões com recobrimento cartográfico deficiente, principalmente naquelas onde as dificuldades de acesso e condições climáticas oneram os procedimentos convencionais. Além disso, os mapas sofrem contínua desatualização, seja por mudanças naturais sofridas pelo meio ambiente no decorrer dos tempos, ou pela interferência direta do homem nesse ambiente. Ao se falar em atualização, a preocupação é a detecção de mudanças, e muitas são as técnicas que levam a essa finalidade. Dentre elas, o uso de Sensoriamento Remoto (SR) aliado a técnicas de Processamento Digital de Imagens (PDI) vem se destacando. Isto porque as imagens de SR têm servido como fonte de dados para estudos em diversas áreas, como por exemplo, Cartografia, Áreas Urbanas, Florestas, Ambientes Agrícolas, entre outros; e também

porque o PDI, especialmente quando aliado ao SR, provê uma ferramenta potencialmente ilimitada de análise, manipulação e extração de informações de imagens digitais. Além disso, a utilização conjunta destas duas áreas do conhecimento proporciona uma alternativa mais rápida e mais viável financeiramente de obtenção de informações, visto que estas podem ser extraídas a partir de imagens aéreas e orbitais segundo técnicas de análise e processamento adequadas.

Dentre as várias técnicas de PDI existentes, a utilizada neste trabalho foi a Morfologia Matemática (MM). A escolha pela MM tem uma justificativa principal: a capacidade que essa ferramenta possui de analisar a estrutura geométrica das imagens a partir de um conjunto perfeitamente definido e conhecido. Este vai interagir com cada entidade contida na imagem em estudo, modificando sua aparência, forma e tamanho, permitindo, assim, que informações sejam obtidas. Isto faz da MM uma poderosa ferramenta de PDI, que dispõe de um grande número de processamentos aplicáveis às mais diversas áreas, tais como Biologia, Metalografia, Medicina, Visão Robótica, Controle de Qualidade, Reconhecimento de Padrões, além da própria Cartografia.

Diante do exposto, este trabalho tem por objetivo contribuir para a automação da área de Cartografia no que diz respeito à atualização. Especificamente, o objetivo foi a extração semi-automática de drenagens em duas seções de uma imagem digital do sensor TM – Landsat5, na banda 4 (0,76 μm a 0,90 μm), órbita/ponto 222/76, de 1998, da região de Londrina-PR. Como era esperado, a MM se mostrou bastante eficaz na extração das feições de interesse e os resultados atestam sua grande utilidade em eventuais processos de atualização cartográfica.

TRABALHOS RELACIONADOS

De muitas maneiras, a área de Cartografia vem tentando extrair feições a partir de imagens digitais. As contribuições para este fim quase sempre visam à automação dos processos, tornando-os mais rápidos e eficientes. Algumas técnicas para extrair feições podem ser encontradas

em Artero (1999), que afirma que, embora grande parte dos processos da área de cartografia tenham sido automatizados – câmeras digitais capturando imagens e enviando-as diretamente a sistemas computacionais, com apoio simultâneo de Sistemas de Posicionamento Global (GPS), e outros dispositivos –, a identificação dos objetos presentes nas imagens continua ainda sendo uma tarefa difícil de ser totalmente resolvida computacionalmente. Apesar do grande avanço tecnológico do *hardware*, uma grande quantidade de informações, presente nas imagens, continua ainda dependendo de um operador humano para ser extraída, e verifica-se, nesta etapa, o grande gargalo do processo.

Em Gato et al. (2001), encontram-se o estudo e a implementação de uma abordagem semi-automática para extração de feições que representem regiões a partir de imagens digitais, com testes feitos por meio de um protótipo implementado na linguagem C++ *Builder*. Este protótipo oferece um conjunto de ferramentas baseadas nas técnicas de processamento digital de imagens e computação gráfica, com o intuito de otimizar o processo de extração de feições através da semi-automatização de algumas operações manuais. Os resultados práticos obtidos através de diversas combinações de processamento são apresentados e discutidos.

Dal Poz e Agouris (2001) apresentam um método de extração semi-automática de rodovias em imagens de satélite ou em fotografias aéreas digitalizadas, visando à captura e à atualização de base de dados do Sistema de Informações Geográficas (SIG). No referido trabalho, um modelo genérico de rodovia é formulado usando propriedades básicas de rodovia, sendo resolvido através do algoritmo de programação dinâmica. Alguns pontos-semente, descrevendo grosseiramente a rodovia, devem ser fornecidos pelo operador, os fundamentos matemáticos do método e os resultados experimentais são apresentados e discutidos.

Neste trabalho, a abordagem adotada para extrair feições sustenta-se na utilização de Sensoriamento Remoto e PDI. A técnica de PDI escolhida foi a Morfologia Matemática. A preocupação não foi somente a extração de alvos de interesse, mas também evitar que houvesse uma segmentação excessiva das cenas, problema corriqueiro em semelhantes processos.

Para tanto, propôs-se um método baseado em operações, tais como afinamento, esqueletização e *pruning*, dentre outras.

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

A Morfologia Matemática (MM) é uma ferramenta para extração de componentes de imagens que sejam úteis na representação e descrição da forma de uma região, como fronteiras, esqueletos e o fecho convexo; e também uma ferramenta para pré-processamento, como filtragem, afinamento e poda (GONZALEZ e WOODS, 2000).

A MM se baseia na idéia de reticulado completo e ordenamento parcial de conjuntos, ou seja, reflexividade, anti-simetria e transitividade.

Definição 1. Seja E um conjunto não vazio de quadrados adjacentes dispostos em linhas e colunas, formando uma superfície retangular. Seja K um conjunto de níveis de cinza. Uma imagem em tons de cinza é um mapeamento $E \rightarrow K$. Usualmente, K pode ser entendido como um intervalo $[0, k]$ em $\mathbb{Q}$ com $E \in \mathbb{Z}^2$.

Definição 2. Sejam f_1, f_2 e f_3 imagens em tons de cinza. O conjunto de imagens com a relação $\leq$ é um conjunto parcialmente ordenado e tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f_1 &\leq f_1 && \text{(Reflexividade)} \\ f_1 &\leq f_2, f_2 \leq f_1 \Leftrightarrow f_1 = f_2 && \text{(Anti-simetria)} \\ f_1 &\leq f_2, f_2 \leq f_3 \rightarrow f_1 \leq f_3 && \text{(Transitividade)} \end{aligned}$$

Além disso, o conjunto é um *reticulado completo* desde que exista, para cada família de imagens, um *ínfimo* e um *supremo*.

Definição 3. Seja L um reticulado completo com $f_1, f_2, f_3 \in L$. Então, é possível escrever

$$\begin{aligned} f_1 \vee f_2 &= f_2 \vee f_1; f_1 \wedge f_2 = f_2 \wedge f_1 && \text{(Comutatividade)} \\ (f_1 \vee f_2) \vee f_3 &= f_1 \vee (f_2 \vee f_3); (f_1 \wedge f_2) \wedge f_3 = f_1 \wedge (f_2 \wedge f_3) && \text{(Associatividade)} \\ f_1 \vee (f_2 \wedge f_3) &= f_1; f_1 \wedge (f_2 \vee f_3) = f_1 && \text{(Absorção)} \end{aligned}$$

em que $\vee, \wedge$ são os operadores de supremo e ínfimo.

Definição 4. O mapeamento entre reticulados completos é uma transformação Ψ que mapeia um elemento do reticulado L_1 em outro elemento do reticulado L_2 .

Com base nas definições de supremo e ínfimo, chega-se às definições das duas operações básicas da MM: *Dilatação* e *Erosão*.

Definição 5. Seja B um subconjunto de Z^2 , $B \subset E$. A Erosão ε de f por B é o valor mínimo entre as translações de f pelos vetores $-b$ de B . Chama-se B de *elemento estruturante*.

$$\varepsilon_B(f) = \bigwedge_{b \in B} f_{-b} \quad (1)$$

Definição 6. A dilatação δ de f por B é o valor máximo entre as translações de f pelos vetores $-b$ de B .

$$\delta_B(f) = \bigvee_{b \in B} f_{-b} \quad (2)$$

O elemento estruturante B é um conjunto completamente definido e conhecido (forma, tamanho), que é comparado, a partir de uma transformação, ao conjunto desconhecido da imagem. O resultado dessa transformação permite avaliar o conjunto desconhecido (FACON, 1996).

A morfologia age sobre imagens digitais a partir de elementos estruturantes geralmente definidos em uma malha retangular. Como exemplo, têm-se, na Figura 1, os elementos estruturantes *cruz* e *box*.

Figura 1. Elementos Estruturantes *cruz* e *box*.

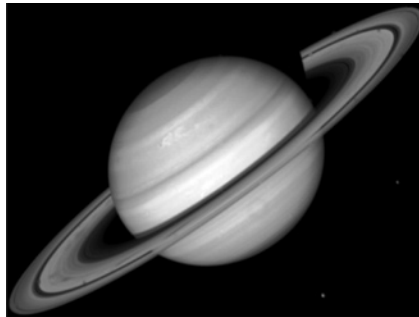
0	1	0
1	1.	1
0	1	0

1	1	1
1	1.	1
1	1	1

Na Figura 1, as posições marcadas com “.” indicam a posição do elemento que receberá o novo valor calculado pela operação, porém ele não precisa necessariamente coincidir com o centro da máscara. A título

de ilustração, a Figura 3 mostra os efeitos da erosão sobre uma imagem em tons de cinza exibida na Figura 2.

Figura 2. Imagem de Saturno, em Tons de Cinza.

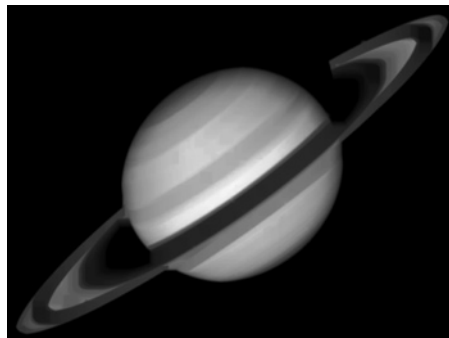


No processo, a imagem da Figura 2 é erodida 5 vezes (5 iterações) com um elemento estruturante *box*.

Como observados na Figura 3, os efeitos da erosão, considerando uma imagem com fundo escuro, são:

- escurecer a imagem;
- alargar os vales (padrões escuros);
- conectar vales próximos;
- reduzir e, às vezes, eliminar picos (padrões claros); e
- separar picos próximos.

Figura 3. Resultado do Processo de Erosão (Iterado 5 Vezes).



Considerando uma imagem com fundo escuro, os efeitos da dilatação são:

- clarear a imagem;
- alargar os picos (padrões claros);
- conectar picos próximos;
- reduzir e, às vezes, eliminar vales (padrões escuros); e
- separar vales próximos.

Para ilustrar estes efeitos, a Figura 4 mostra o resultado da dilatação iterada 5 (cinco) vezes com o elemento *box* sobre a Figura 2.

Figura 4. Resultado do Processo de Dilatação (Iterado 5 Vezes).



Mais detalhes sobre as propriedades e exemplos de aplicação de erosão e dilatação podem ser encontrados em Banon e Barrerra (1998); Serra (1986); Barrerra (1987); Haralick et al. (1987); e Facon (1996).

Apoiando-se nas operações de dilatação e erosão, é possível definir transformações crescentes e idempotentes: os filtros de *abertura* e *fechamento*.

Definição 7. A *abertura* γ de f por um elemento estruturante B , denotada por $\gamma_B(f)$, é a erosão de f por B seguida de uma dilatação pelo transposto de B (SOILLE, 1998).

$$\gamma_B(f) = \delta_{\tilde{B}} [\epsilon_B(f)] \quad (3)$$

Definição 8. O fechamento ϕ de f por um elemento estruturante B , denotado $\phi_B(f)$, é a dilatação de f por B seguida de uma erosão pelo transposto de B (ibid.).

$$\phi_B(f) = \varepsilon_{\tilde{B}} [\delta_B(f)] \quad (4)$$

Propriedades de abertura e fechamento podem ser encontradas em Banon e Barrerra (1998).

Segundo Soille (1998), uma transformação tendo as mesmas propriedades da abertura, mas que não pode ser escrita como uma única erosão seguida pela dilatação com o elemento estruturante transposto, é chamada *abertura algébrica*. Sua operação dual é o *fechamento algébrico*. Matheron (1975) mostrou que qualquer abertura algébrica pode ser definida como o supremo de uma família de aberturas.

Uma poderosa ferramenta para a filtragem de componentes conectados é uma abertura algébrica chamada *abertura de área*.

Definição 9. Uma abertura de área γ_λ é equivalente à união de todas as aberturas com o elemento estruturante conectado B cujo tamanho em número de pixels é igual a λ (SOILLE, 1998).

$$\gamma_\lambda = \bigvee_i \{ \gamma_{bi} \mid B_i \text{ conec. e } Area(B_i) = \lambda \} \quad (5)$$

Definição 10. Fechamento de área ϕ_λ é equivalente à interseção de todos os fechamentos com o elemento estruturante conectado B cujo tamanho em número de pixels é igual a λ (ibid.).

$$\phi_\lambda = \bigwedge_i \{ \phi_{bi} \mid B_i \text{ conec. e } Area(B_i) = \lambda \} \quad (6)$$

O efeito das transformações nas definições 9 e 10 poderá ser compreendido mais facilmente adiante se f for definida do ponto de vista da *decomposição em limiares*.

Seja uma transformação T que mapeia os tons de cinza de f em $[0,1]$. Então se pode escrever:

$$[T_{[ti,tj]}(f)](x) = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \leq f(x) \leq t_j \\ 0, & \text{se outro} \end{cases} \quad (7)$$

Definição 11. A seção cruzada $CS_t(f)$ de uma imagem em tons de cinza f ao nível t é o conjunto de pixels da imagem cujos valores são maiores ou iguais a t (SOILLE, 1998).

Definição 12. Se f é uma imagem em tons de cinza, ela pode ser decomposta como a soma de suas seções cruzadas, com exceção do nível 0 (que sempre será constante e igual a 1).

$$f = \sum_{t=1}^{t_{\max}} CS_t(f) \quad (8)$$

O conjunto de pixels de uma imagem binária, que está mais próximo de um dado componente conectado que de qualquer outro, define a zona de influência do componente conectado considerado. Há, portanto, uma correspondência de *um-para-um* entre o conjunto de componentes conectados de uma imagem binária e o conjunto de suas zonas de influência.

As bordas das zonas de influência definem o esqueleto por zonas de influência.

Definição 13. Seja f uma imagem binária ou um conjunto, e $K_1, K_2, \dots, K_n$ os componentes conectados de f .

$$f = \bigcup_{i=1}^n K_i, \quad i \neq j \Rightarrow K_i \neq K_j \quad (9)$$

Definição 14. A zona de influência IZ de uma partícula K_i é o conjunto dos pixels do plano da imagem que está mais próximo a K_i do que qualquer outra partícula de f .

$$IZ(K_i) = \{x \in f \mid \forall j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j \Rightarrow d(x, K_i) < d(x, K_j)\} \quad (10)$$

Definição 15. O esqueleto por zonas de influência, ou *SKIZ*, é definido como sendo os pontos que não pertencem a qualquer zona de influência (SOILLE, 1998):

$$SKIZ(X) = \left[\bigcup_i IZ(K_i) \right]^c \quad (11)$$

É comum considerar, em análise de imagens, que os objetos da imagem são regiões de níveis de cinza homogêneos. Daí segue que as bordas dos objetos estão localizadas onde existem altas variações de níveis de cinza. Operadores de gradiente são usados para realçar tais variações.

Gradientes Morfológicos são operadores que realçam variações de intensidade de pixel em uma vizinhança determinada por um elemento estruturante. A erosão/dilatação fornece para cada pixel o mínimo/máximo valor da imagem na vizinhança definida pelo elemento estruturante. Variações são, portanto, realçadas combinando estes operadores. Três combinações são geralmente usadas:

- a) Diferença aritmética entre a dilatação e a erosão;
- b) Diferença aritmética entre a dilatação e a imagem original; e
- c) Diferença aritmética entre a imagem original e sua erosão.

DETECÇÃO DAS FEIÇÕES

Duas imagens foram escolhidas de forma que se caracterizassem duas situações diferentes: em uma, a drenagem se apresenta com uma largura considerável em relação aos demais alvos na cena; na outra, a largura da feição é relativamente pequena. Abordagens distintas foram adotadas no momento da extração. No primeiro caso, foram assumidas como de interesse as bordas da feição e, no segundo, o eixo. As duas situações foram escolhidas para simular a utilização das feições extraídas em produtos cartográficos com escalas diferentes. Em escalas pequenas, cursos de rio têm uma representação linear, enquanto que, em grandes escalas, os corpos d'água são representados por polígonos.

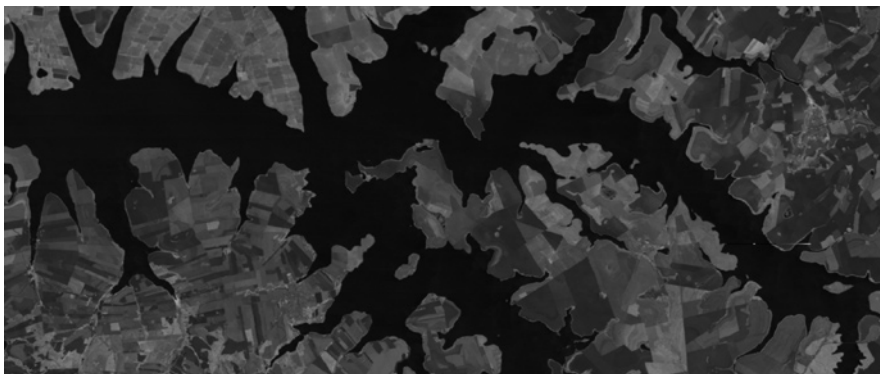
A seguir, nas Figuras 5 e 6, são mostradas as imagens escolhidas, intituladas *drena1* e *drena2*.

Figura 5. Imagem Original *drena1* (Interesse: Eixo do Rio).



Como se observa na Figura 5, os alvos na cena constituem-se, na sua maioria, de áreas de pastagem e cultivo. A banda 4, correspondente do satélite Landsat5 (sensor TM) da faixa espectral do infravermelho próximo ($0,76$ a $0,90 \mu\text{m}$) foi escolhida para o trabalho por causa das características que envolvem o comportamento espectral da água nessa faixa do espectro eletromagnético. A radiação eletromagnética do infravermelho próximo é quase totalmente absorvida pela água, tornando-a muito escura nas imagens dessa banda. Ao mesmo tempo, a vegetação tem uma resposta alta fazendo com que os corpos d'água cercados por áreas plantadas, de pasto ou de mata natural, ganhem destaque. A mesma situação ocorre na imagem mostrada na Figura 6.

Figura 6. Imagem Original *drena2* (Interesse: Bordas do Rio).



PROCESSAMENTO DA IMAGEM *DRENA1*

O primeiro passo rumo à extração do eixo da drenagem na Figura 5 foi submetê-la a uma binarização (transformação que mapeia os tons de cinza da imagem para 0 e 1, a partir de um limiar geralmente escolhido com o auxílio do histograma da imagem). A intenção foi realçar a drenagem e saturar o nível de brilho das demais feições. O efeito obtido é mostrado na Figura 7. Ainda não é um resultado ideal, já que a feição de interesse é a drenagem, podendo-se assumir, em razão disso, os demais alvos como sendo “ruídos” a serem suprimidos.

Figura 7. Binarização da Imagem *drena1*.



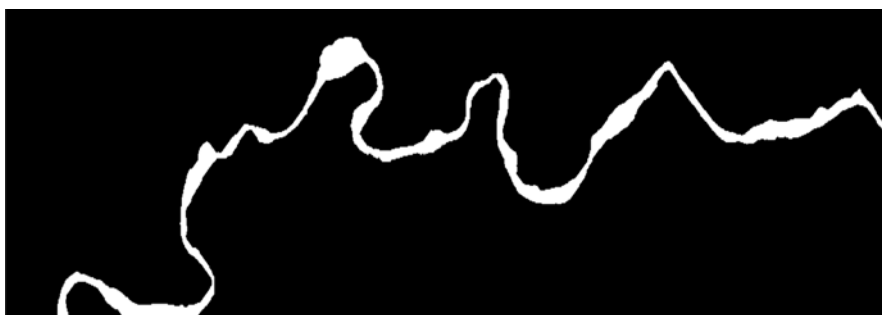
Assim, uma operação de abertura de área (*Definição 9*) foi aplicada para eliminar componentes de tamanho específico conectados. O resultado dessa abertura sobre o negativo ($255 - \text{imagem}$) da imagem *drena1* pode ser visto na Figura 8. O parâmetro de área utilizado foi 5.100 pixels.

Figura 8. Eliminação de Componentes Conectados da Imagem Mostrada na Figura 7.



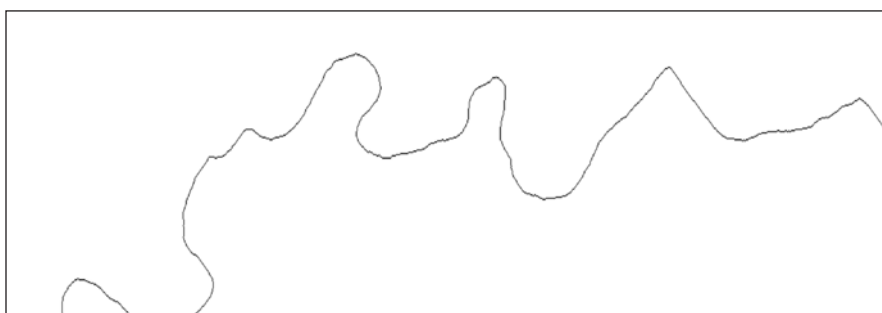
Para que se pudesse extrair o eixo da feição de maneira adequada, uma outra operação intermediária foi efetuada, porque, como se observa pelo resultado exibido na Figura 8, o rio apresenta alguns buracos (setas na Figura 8) que podem atrapalhar o processo de extração. Portanto, para preencher a feição de maneira que ela não mais apresente esta característica, efetuou-se uma operação de fechamento morfológico, iterada 7 vezes, conforme a Figura 9.

Figura 9. Fechamento da Imagem Exibida na Figura 8.



Agora, a imagem mostrada na Figura 9 se apresenta sem qualquer lacuna. A partir de então, deu-se a extração do eixo da feição por meio de uma esqueletização por regiões de influência. O resultado é mostrado na Figura 10.

Figura 10. Eixo Extraído da Imagem da Figura 9.



PROCESSAMENTO DA IMAGEM *DRENA2*

Analogamente ao que foi feito com a imagem *drena1*, o primeiro passo para extrair as bordas da imagem *drena2* foi realizar uma binarização. O resultado da saturação de tons de cinza da imagem *drena2* (Figura 6) pode ser visto na Figura 11.

Figura 11. Binarização da Imagem *drena2*.



Em seguida, uma operação para eliminar componentes conectados de tamanho inferior a 400 (abertura de área) foi realizada sobre o negativo da imagem exibida na Figura 11, e o resultado segue na Figura 12.

Figura 12. Eliminação de Componentes Conectados da Imagem Exibida na Figura 11.

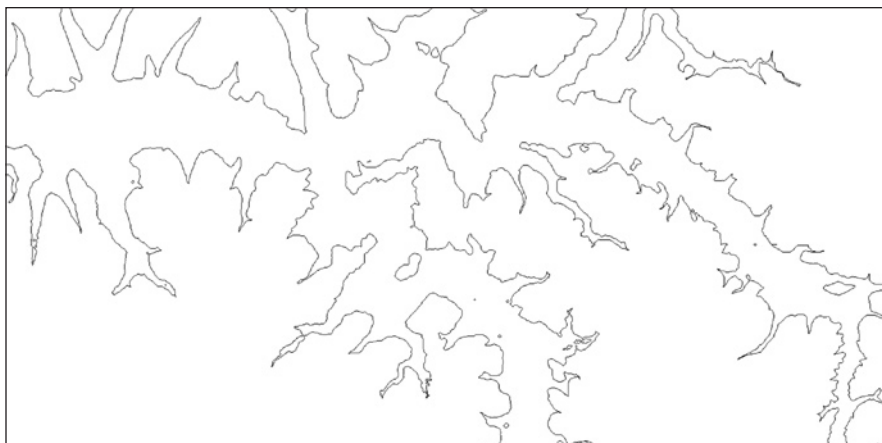


A Figura 12 apresenta somente a feição de interesse pronta para que suas bordas sejam extraídas. Isso foi conseguido através de um gradiente. O gradiente morfológico clássico (diferença entre dilatação e erosão) produz bordas com espessura de 2 pixels para um elemento estruturante cuja conectividade estudada seja a mínima. Como em processos de atualização de feições, o ideal é que estas possuam espessura de um pixel; o gradiente aplicado foi a diferença aritmética entre a imagem original e sua erosão. O procedimento foi o seguinte:

Onde $Bin(f)$ é a imagem binarizada, mostrada na Figura 12. O resultado é exibido na Figura 13.

$$Bordas = Bin(f) - \varepsilon_B(Bin(f))$$

Figura 13. Bordas Extraídas da Imagem Exibida na Figura 12.



CONCLUSÃO

Extraír feições de imagens digitais obtidas por Sensoriamento Remoto não é uma tarefa simples, e várias são as aplicações em Processamento Digital de Imagens que podem ser utilizadas com esse intuito. Neste trabalho, a técnica de PDI empregada foi a Morfologia Matemática (MM), escolhida por apresentar operações capazes de fazer a análise

da estrutura geométrica das entidades presentes nas imagens. Em vista disto e, como se esperava, as operações morfológicas foram totalmente eficazes nas extrações do eixo e bordas das imagens *drena1* e *drena2*, respectivamente. Os resultados mostrados nas Figuras 10 e 13 atestam que, a partir das imagens originais, foi possível, com a técnica de MM utilizada, extrair apenas as entidades de interesse, eliminando todos os demais alvos presentes nas cenas e, conseqüentemente, anulando a possibilidade de uma segmentação excessiva causada por eles. O resultado foi positivo e pode ser utilizado em processos não convencionais de atualização de produtos cartográficos.

REFERÊNCIAS

- ARTERO, A. O. *Técnicas para extração automática de feições retas em imagens digitais*. Presidente Prudente-SP, 1999. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Ciências e Tecnologia – Unesp.
- BANON, G. J. F.; BARRERA, J. *Bases da morfologia matemática para a análise de imagens binárias*. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 1998.
- BARRERA, J. *Uma abordagem unificada para os problemas de processamento digital de imagens: a morfologia matemática*. São José dos Campos, 1987. Dissertação (Mestrado), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).
- DAL POZ, A. P.; AGOURIS, P. Um algoritmo de otimização global para a extração de rodovias em imagens digitais. *Revista Brasileira de Cartografia*, Curitiba-PR, n. 53, p. 65-72, 2001.
- FACON, J. *Morfologia matemática: teoria e exemplos*. Curitiba: PUC, 1996.
- GATO, H. E. R.; IMAI, N. N.; TOMMASELLI, A. M. G. Uma abordagem semi-automática para a extração de feições cartográficas. *Revista Brasileira de Cartografia*, Rio de Janeiro, v. 53, n. 1, p. 16-28, 2001.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. *Processamento de imagens digitais*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 2000.
- HARALICK, R. M.; STERNBERG, S. R.; ZHUANG, X. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Washington-USA: IEEE Computer Society, v. 9, n. 4, p. 532-550, jul. 1987.
- MATHERON, G. *Random sets and integral geometry*. Wiley-USA: [s.n.], 1975.

SERRA, Jean P. F. Introduction to mathematical morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, [s.l.:s.n.], v. 35, n. 3, p. 283-305, 1986.

SOILLE, P. *Morphological image analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

TAYLOR, D. R. F. A conceptual basis for cartography: new directions for the information era. *Cartographica*, [s.l.], v. 28, n. 4, 1991.